第１章　ソリトンに関する基本理論

１-１．非線形キャパシタンスの特性

非線形ＬＣはしご型回路の設計では、ＬとＣのどちらに非線形性をもたせるかという問題があるが、キャパシタンスを非線形素子として用いるのが実現し易く一般的である。非線形キャパシタンスは可変容量ダイオードにより実現できるが、これはPN接合に逆バイアス電圧をかけると、その値によって接合部の空孔層の厚さを変化させることができ、等価的に容量変化を行うことが出来るという性質を利用したものである。V_0を直流逆バイアス電圧とし、このキャパシタの容量Ｃ（Ｖ）を

$$C(V) = \frac{Q(V_0)}{F(V_0)+V-V_0} \tag{1-1}$$

として電圧Ｖに依存させる。逆数をとると

$$\frac{1}{C(V)} = \frac{1}{Q(V_0)}\left(F(V_0)+V-V_0\right) \tag{1-2}$$

となり、１／Ｃ（Ｖ）が電圧Ｖに比例していればよいことがわかる。

実際の可変容量ダイオードの特性をFig.１-１に示す。Fig.１-１の直線で近似できる部分を

$$\frac{1}{C(V)} = aV+b \tag{1-3}$$

とおくと、(1-2)と比較して、係数ａ、ｂは

$$a = \left(Q(V_0)\right)^{-1}$$
$$b = \left(F(V_0)-V_0\right)a$$

であり

$$Q(V_0) = a^{-1} \qquad (1\text{-}4)$$

$$F(V_0) = \frac{b}{a} + V_0 \qquad (1\text{-}5)$$

となる。

1-2. 非線形ＬＣはしご形回路

非線形ＬＣはしご形回路でFig. 1-2のようにｎ番目のキャパシタに加わる電圧をV_nとし、ｎ－１番目とｎ番目のキャパシタを結ぶインダクタに流れる電流をI_{n-1}とすると電圧と電流の関係は

$$L\frac{dI_n}{dt} = V_n - V_{n+1} \qquad (1\text{-}6)$$

となる。同様にｎにｎ－１を代入した式は、

$$L\frac{dI_{n-1}}{dt} = V_{n-1} - V_n \qquad (1\text{-}7)$$

となる。(1-6)－(1-7)より

$$L\frac{d}{dt}(I_{n-1} - I_n) = V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n \qquad (1\text{-}8)$$

を得、キャパシタを流れる電流とそれにたまる電荷Q_nの関係

$$\frac{dQ_n}{dt} = I_{n-1} - I_n \qquad (1\text{-}9)$$

を用いると、電荷と電圧の関係は

$$L\frac{d^2Q_n}{dt^2} = V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n \qquad (1\text{-}10)$$

となる。

さて、キャパシタの両端電圧V_nとそこに蓄えられる電荷Q_nの関係は一般に

$$Q_n = \int_0^{V_n} C\,dV \tag{1-11}$$

であらわされる。

非線形キャパシタCがVの関数として

$$C(V) = \frac{Q(V_0)}{F(V_0) + V - V_0}$$

で与えられると、これを(1-11)に代入して

$$Q_n = \int_0^{V_0} \frac{Q(V_0)}{F(V_0) + V - V_0}\,dV + \int_{V_0}^{V_0+V_n} \frac{Q(V_0)}{F(V_0) + V - V_0}\,dV \tag{1-12}$$

とすることができる。これを(1-10)に代入すると第2項のみ残り、整理すると

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln\left(1 + \frac{V_n}{F(V_0)}\right) = \frac{1}{LQ(V_0)}\left(V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n\right) \tag{1-13}$$

となる。これは、戸田格子の運動方程式と同じ形であり、ソリトン解を持つ。

戸田格子との比較により非線形LCはしご形回路の1ソリトン解は

$$V_n = F(V_0)\sinh^2 K \cdot \mathrm{sech}^2(kn - \omega t) \tag{1-14}$$

と書ける。ここで、

$$\omega^2 = \frac{F(V_0)}{LQ(V_0)}\sinh^2 k \tag{1-15}$$

であり、

$$C(V_0) = \frac{Q(V_0)}{F(V_0)} \tag{1-16}$$

という関係を使えば、ωは、

$$\omega^2 = \frac{1}{LC(V_0)} \sinh^2 k \tag{1-17}$$

と書くことができる。

(1-15)よりソリトンの振幅は$A = F(V_0)\sinh^2 k$ (1-18)

幅は $W = 1/k$ (1-19)

速度は$\nu = \left(\frac{1}{LC(V_0)}\right)^{1/2} \frac{\sinh k}{k}$ (1-20)

となり、kを大きくすると振幅と速さは増大し、幅は減少する。ただし、ここで k は波数といい、

$$k = 2\pi/\lambda \tag{1-21}$$

である。

ソリトンの速度を、線形の長波長の波の速度 $1/(LC(V_0))^{1/2}$で規格化したとき、

$$M = \frac{\sinh k}{k} \tag{1-22}$$

をマッハ数という。同じマッハ数のときは、kは同一値を保つため振幅はF（V_0）の値に比例して変化する。F（V_0）が小さいと、小さな振幅のソリトンでもそのときのマッハ数で進むため非線形性は強くなる。一方、逆バイアス電圧V_0が小さいとき、F（V_0）は小さいから同じように非線形効果が強くなる。

1-3. 2ソリトン解

1個の孤立波は

$$\psi = 1 + e^{2\theta_1} \qquad (1\text{-}23)$$
$$\theta_1 = k_1 - \omega_1 t$$

で表され、もう1つの解、

$$\psi = 1 + e^{2\theta_2} \qquad (1\text{-}24)$$
$$\theta_2 = k_2 - \omega_2 t$$

から次の式

$$\psi = 1 + A_1 e^{2\theta_1} + A_2 e^{2\theta_2} + A_3 e^{2(\theta_1 + \theta_2)} \qquad (1\text{-}25)$$
$$\theta_i = K_i x - \omega_i t \qquad i = 1,\ 2$$

を考えると、これはK-dV方程式を書き改めた

$$\psi_x \psi_t - \psi \psi_{xt} = 3\ (\psi_{xx})^2 - 4\psi_x \psi_{xxx} + \psi \psi_{xxx} \qquad (1\text{-}26)$$

を満足する。(1-25)を(1-26)に代入することによって

$$\omega_1 = 4k_1{}^3$$
$$\qquad (1\text{-}27)$$
$$\omega_2 = 4k_2{}^3$$

を得、また、

$$A_3 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 A_1 A_2 \qquad (1\text{-}28)$$

を得るが、この(1-27)、(1-28)の関係があるとき(1-25)は(1-26)の解であり、これがK-dV方程式の2ソリトン解である。これを用いて2個のソリトンの漸近形を求めると、$t \to -\infty$では

$$u=\sum_{i=1}^{2}\{-2k_i^2\ \mathrm{sech}\ (k_i x-4k_i^3 t-\delta_i^{(-)})\}\qquad(1\text{-}29)$$

$$\delta_1^{(-)}=-\frac{1}{2}\ln A_1\quad,\quad\delta_2^{(-)}=-\frac{1}{2}\ln\frac{A_3}{A_1}$$

$t\to+\infty$でも同じ振幅のソリトンが現れ、解の漸近形は

$$u=\sum_{i=1}^{2}\{-2k_i^2\ \mathrm{sech}\ (k_i x-4k_i^3 t-\delta_i^{(+)})\}\qquad(1\text{-}30)$$

$$\delta_1^{(+)}=-\frac{1}{2}\ln\frac{A_3}{A_2}\quad,\quad\delta_2^{(+)}=-\frac{1}{2}\ln A_2$$

となる。$t\to\pm\infty$におけるソリトンの位置は位相の項を無視すると、

$$x\fallingdotseq 4k_i^2 t,\qquad i=1,\ 2$$

である。$k_1>k_2$とすると、振幅が$-2k_1^2$である大きなソリトンは、$t\to-\infty$では振幅$-2k_2^2$の小さなソリトンの左側にあるが、$t\to+\infty$では右側にくる。また、$t\to-\infty$でのソリトンが$t\to+\infty$でも同じ振幅であらわれる。つまり、振幅の大きなソリトンは小さなソリトンを追い越し、２つのソリトンは追越しの前後で波形が壊れないことがわかる。

１-４． 線路の不純物と局在振動

線形であれ非線形であれ、線路に不純物が存在すると、不純物のある点で反射が起こり、また、波が通過した後には局在振動と呼ばれる規則的な振動が残る。このために波はそのエネルギーの一部を失う。これがソリトンの場合、不純物通過前の振幅Ａに対して、エネルギーの損失をδＡとすると、Ａがあまり大きくない範囲で、

$$\delta A\propto A_2\ \ (1-L_0/L)^2\qquad(1\text{-}31)$$

となる。ただし、L_0は不純物であるインダクタンスを表す。

さて、波が不純物を通過した後に生じる規則的な振動、局在振動について、線形線路で

考える。不純物の存在する段数をn_i、不純物であるインダクタンスの前のキャパシタにかかる電圧をV_{n_i}、後にかかる電圧を$V_{n_{i+1}}$、さらにその後段にかかる電圧を$V_{n_{i+2}}$とすると、

$$L_0 \frac{dI_0}{dt} = V_{n_i} - V_{n_{i+1}} \tag{1-32}$$

であり、不純物前後段以外については、

$$L \frac{dI_{n-1}}{dt} = V_{n-1} - V_n \tag{1-7}$$

となる。電流と電圧の関係は、

$$\frac{dQ_n}{dt} = I_{n-1} - I_n \tag{1-9}$$

で、不純物前後段以外で、

$$L\frac{d^2Q_n}{dt^2} = V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n \tag{1-10}$$

となる。一方、不純物前後段については、

$$C\frac{d^2V_{n_{i+1}}}{dt^2} = \frac{1}{L_0}(V_{n_i} - V_{n_{i+1}}) - \frac{1}{L}(V_{n_{i+1}} - V_{n_{i+2}}) \tag{1-33}$$

$$C\frac{d^2V_{n_i}}{dt^2} = \frac{1}{L}(V_{n_{i-1}} - V_{n_i}) - \frac{1}{L_0}(V_{n_i} - V_{n_{i+1}}) \tag{1-34}$$

となり、$n \geqq n_i$で電圧V_nについて、

$$V_n = A\alpha_{n-n_i-1}\cos\omega t \tag{1-35}$$

と仮定して、式(1-33)、(1-34)を解く。ただし、α、ωは定数である。結果は、

$$S = L_0 / L \tag{1-36}$$

として、

$$\alpha = \frac{S}{S-2} \tag{1-37}$$

$$\omega = \omega_c \frac{1}{\{S(2-S)\}^{1/2}} \tag{1-38}$$

となる。ここで$L_0 < L$のときは、$S < 1$だから、

$$-1 < \alpha < 0$$
$$\omega > \omega_c$$

となり、(1-35)から、局在振動は、遮断周波数より高い振動数をもって次第に減衰していくことがわかる。

これらは、線形の線路で考えたが、非線形線路においても、局在振動の振幅が小さいならば非線形効果を意識することなく扱うことができるため、(1-35)で近似できると考えられる。